ISSN:2181-0702

SCIENTIFIC BULLETIN

PHYSICAL AND MATHEMATICAL RESEARCH

ILMIY HABARNOMA

FIZIKA-MATEMATIKA TADQIQOTLARI

2023
VOLUME 5
ISSUE 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

УДК: 517.95

Нелокальная задача для вырождающегося уравнения второго порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с функцией бесселя в ядре

Уринов А.К., Усмонов Д.А.

Ферганский государственный университет. Узбекистан, 150100. г. Фергана. ул. Мураббийлар. 19.

Получена 26 мая 2023 г. Принята к печати 15 июня 2023 г.

Аннотация. В данной работе в прямоугольной области исследуется начально – граничная задача для вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре. При этом, применением метода разделения переменных к изучаемой задаче, получена спектральная задача для обыкновенного дифференциального уравнения. Далее, построена функция Грина спектральной задачи, с помощью чего она эквивалентно сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Решение изучаемой задачи выписано в виде суммы ряда Фурье по системе собственных функций спектральной задачи. Получена оценка для решения задачи, откуда следует его непрерывная зависимость от заданных функций.
Ключевые слова: вырождающееся уравнение, начально-граничная задача, спектральный метод, функция Грина, интегральное уравнение

Annotation. In this work, in a rectangular domain, we study the initial-boundary problem for a degenerate second-order differential equation containing an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel. At the same time, by applying the method of separation of variables to the problem under study, a spectral problem for an ordinary differential equation is obtained. Next, the Green's function of the spectral problem is constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an integral Fredholm equation of the second kind with a symmetric kernel. The solution of the problem under study is written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. An estimate for solving the problem is obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.
Keywords: degenerate equation, initial boundary value problem, spectral method, Green's function, integral equation

Аннотация: Ушбу мақолада ядросида Бессель функцияси қатнашган интегро – дифференциал операторни ўз ичига олувчи иккинчи тартибли бузиладиган дифференциал тенглама учун нолокал масала тадқиқ этилган. Ўзгарувчиларни ажратиш усули орқали, оддий дифференциал тенглама учун спектрал масала ҳосил қилинган. Бу спектрал масала Грин функцияси ёрдамида симметрик ядроли иккинчи тур Фредголм интеграл тенгламасига эквивалент келтирилган. Ўрганилаётган масаланинг ечими спектрал масаланинг хос функциялар системасига нисбатан Фурье қаторининг йиғиндиси сифатида топилган. Масала ечимининг баҳоси олинган, ундан унинг берилган функцияларга доимий боғлиқлиги исботланган.
Калит сўзлар: бузиладиган тенглама, бошланғич-чегаравий масала, спектрал усул, Грин функцияси, интеграл тенглама.

PACS number(s): 02.30. Jr.

I. Введение.

Известно, что теория дробного интегрирования и дифференцирования является одним из новых разделов математической науки [1], [2], [3]. К настоящему времени дробные интегро-дифференциальные операторы в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, а также дифференциальные уравнения, в которых они участвуют, изучены многими исследователями [4] - [8]. В последнее время наблюдается повышенный интерес к изучению дробных интегро-дифференциальных операторов со специальными функциями в ядрах [9], [10], [11].

II. Постановка задач

В данной работе в прямоугольной области $\Omega=\{(x,t):0<x<1;0<t<T\}$ рассмотрим следующее вырождающееся уравнение второго порядка

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t)+bu(x,t)=\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x+f(x,t), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ - неизвестная функция,

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)} \int_0^t (t-z)^{1-\delta}\, \bar{J}_{(1-\delta)/2}\left[\gamma(t-z)\right] \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \gamma^2 \right) u(x,z)\,dz \tag{2} $$

- дробный дифференциальный оператор типа оператора Капуто с функцией Бесселя в ядре [12] от функции $u(x,t)$ по аргументу t, $\bar{J}_\nu(z)$- функция Бесселя - Клиффорда, определяемая равенствам

$(z)_k$ - символ Похгаммера, $\Gamma(x)$- гамма-функция Эйлера [13], $J_\nu(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка ν [14], а α, β, γ, δ, b - заданные действительные числа, причем $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $1 < \delta < 2$, $b \ge 0$.

Очевидно, что уравнение вдоль линий $x = 0$ и $x = 1$ вырождается.

Задача A_{pq}. Найти функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами: 1) $u(x,t)$, $x^\alpha (1-x)^\beta u_x, u_t \in C(\bar{\Omega})$, $D_{0t}^{\delta,\gamma} u(x,t) \in C(\Omega)$, $\left[x^\alpha (1-x)^\beta u_x \right]_x \in C(\Omega)$; 2) в области Ω удовлетворяет уравнению (1); 3)на границе области Ω выполняются следующие начальные и граничные условия:

$$ u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_2(x), x \in [0,1]; \tag{4} $$

$$ pu(0,t) = qu(1,t), q\, x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,t)\Big|_{x=0} = p\, x^\alpha (1-x)^\beta u_x(x,t)\Big|_{x=1}, t \in [0,T], \tag{5} $$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – заданные непрерывные функции, а p, $q \in R$ - заданные числа, причем $p^2 + q^2 \ne 0$.

III. Исследование спектральной задачи

При применении метода Фурье к поставленной задаче A_{pq} возникает следующая спектральная задача: найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения

$$ Mv \equiv -\left[x^\alpha (1-x)^\beta v'(x) \right]' = \lambda v(x),\ 0 < x < 1, \tag{6} $$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$ \left. \begin{array}{c} v(x), x^\alpha (1-x)^\beta v'(x) \in C[0,1]; \\ pv(0) = qv(1), q\left[x^\alpha (1-x)^\beta v'(x) \right]\Big|_{x=0} = p\left[x^\alpha (1-x)^\beta v'(x) \right]\Big|_{x=1}. \end{array} \right\} \tag{7} $$

Лемма 1. *Если* $p \ne q$, *то задача* $\{(6),(7)\}$ *имеет счетное число собственных значений* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots,\quad \lambda_k \to +\infty$, *а соответствующие им собственные функции* $v_1(x), v_2(x), \ldots, v_k(x)\ldots$ *образуют ортонормированную систему в пространстве* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (6) на функцию $v(x)$ и проинтегрируем по x на сегменте $[0,1]$. Затем, применяя правило интегрирования по частям к интегралу, стоящему в левой части, и учитывая условия (7), получим

$$ \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \left[v'(x) \right]^2 dx = \lambda \int_0^1 v^2(x)\,dx. $$

Отсюда, при $v(x) \not\equiv 0$ следует $\lambda \ge 0$. Если $\lambda = 0$, то из последнего равенства следует $v'(x) = 0$, $0 < x < 1$. Тогда $v(x) = C_0$, $x \in (0,1)$, откуда, в силу условия $pv(0) = qv(1)$,

$p \neq q$, получим $v(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq 1$. Следовательно, задача $\{(6),(7)\}$ может иметь нетривиальные решения только при $\lambda > 0$.

Существование собственных значений задачи $\{(6),(7)\}$ докажем методом функций Грина. Здесь функция Грина $G(x,s)$ должна обладать следующими свойствами:

1) функция $G(x,s)$ непрерывна для всех $x, s \in [0,1]$;

2) в каждом из интервалов $(0,s)$ и $(s,1)$ существует непрерывная производная $(\partial/\partial x)G(x,s)$, а при $x = s$ имеет скачок $\left[-s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta}\right]$, т.е.

$$(\partial/\partial x)G(x,s)\big|_{x=s+0} - (\partial/\partial x)G(x,s)\big|_{x=s-0} = -s^{-\alpha}(1-s)^{-\beta};$$

3) в интервалах $(0,s)$ и $(s,1)$ функция $G(x,s)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет однородному уравнению $MG(x,s) = 0$;

4) при $\forall s \in (0,1)$ выполняются граничные условия

$$pG(0,s) = qG(1,s),\ qx^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_x(x,s)\big|_{x=0} = px^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_x(x,s)\big|_{x=1}.$$

Пользуясь представлениями общего решения уравнения $MG(x,s) = 0$ в промежутках $(0,s)$ и $(s,1)$, нетрудно убедиться, что функция $G(x,s)$, обладающая перечисленными выше свойствами, существует, единственна и имеет вид

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{p}{p-q}\displaystyle\int_0^x \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q}{p-q}\displaystyle\int_0^s \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, x < s; \\ \dfrac{p}{p-q}\displaystyle\int_0^s \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q}{p-q}\displaystyle\int_0^x \dfrac{dz}{z^{\alpha}(1-z)^{\beta}} + \dfrac{q^2\sigma}{(p-q)^2}, s < x, \end{cases} \tag{8}$$

где $\sigma = B(1-\alpha, 1-\beta)$ - бета - функция Эйлера [13].

Очевидно, что $G(x,s) = G(s,x)$.

Методом, примененным в [], легко убедиться, что задача $\{(6),(7)\}$ эквивалентна следующему интегральному уравнению с симметричным ядром:

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,s)v(s)ds. \tag{9}$$

Так как ядро $G(x,s)$ непрерывно, симметрично и положительно (т.е. $\lambda > 0$), то в силу эквивалентности уравнения (9) и задачи $\{(6),(7)\}$, согласно теории интегральных уравнений [16], справедливо утверждение леммы 1.

Лемма 2. *Пусть функция* $h(x)$ *удовлетворяет условиям:*

$$h(x) \in C[0,1], \tag{10}$$

$$x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x) \in C[0,1], \tag{11}$$

$$ph(0) = qh(1), \tag{12}$$

$$q\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]\Big|_{x=0}=p\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}h'(x)\right]\Big|_{x=1}, \tag{13}$$

$Mh(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$. Тогда, ее можно разложить на отрезке $[0,1]$ в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ задачи $\{(6),(7)\}$.

Доказательство. В силу свойства функций $G(x,s)$ и $h(x)$, справедливо равенство

$$\int_0^1 G(x,s)Mh(s)ds=-\int_0^1 G(x,s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]'ds=-\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}h'(s)\right]G(x,s)\Big|_{s=0}^{s=1}+$$

$$+h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_s(x,s)\right]\Big|_{s=0}^{s=x-0}+h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_s(x,s)\right]\Big|_{s=x+0}^{s=1}-$$

$$-\int_0^1 h(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}G_s(x,s)\right]_s ds=h(x).$$

Следовательно, $h(x)$ - есть функция, представимая через ядро $G(x,s)$.

Кроме этого, в силу $G(x,s)\in C\{(x,s):0\le x,s\le 1\}$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 G^2(x,s)ds=A(x)\le C_1=const<+\infty.$$

Тогда, согласно теореме Гильберта - Шмидта [16], справедливо утверждение леммы 2.

IV. **Вспомогательные леммы**

В этом пункте предполагается, что $p\neq q$ и под λ_k и $v_k(x)$, $k\in N$ понимаются собственные значения и собственные функции задачи $\{(6),(7)\}$, а под h_k - коэффициент Фурье заданной функции $h(x)$ по системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$, т.е. $h_k=\int_0^1 h(x)v_k(x)dx$.

Лемма 3. (О сходимости билинейных рядов). Следующие ряды сходятся равномерно на сегменте $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left[v_k(x)\right]^2/\lambda_k,\ \sum_{k=1}^{+\infty}\left\{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]\right\}^2/\lambda_k^2. \tag{14}$$

Доказательство. Так как ядро $G(x,s)$ интегрального уравнения (9) симметрично, положительно (т.е. $\lambda>0$) и непрерывно в $\{(x,s):0\le x,s\le 1\}$, то на основании теоремы Мерсера [16], это ядро представлено абсолютно и равномерно сходящимся билинейным рядом $G(x,s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}$. Отсюда, в частности, при $x=s$ следует, что $G(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\le C_2=const<+\infty,$ т.е. первый ряд в(14) равномерно сходится на отрезке $[0,1]$. Теперь, согласно уравнению (9), имеет место равенство

$$\frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)}{\lambda_k}=\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_x(x,s)v_k(s)ds.$$

Так как $\{v_k(s)\}_{k=1}^{+\infty}$ - ортонормальная система, то функцию $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)/\lambda_k$ можно считать коэффициентом Фурье функции $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}G_x(x,s)$ по аргументу s. Тогда, согласно неравенству Бесселя, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]^2}{\lambda_k^2}\le\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta}\left[G_x(x,s)\right]^2ds. \tag{15}$$

Из (8) легко следует, что

$$\int_0^1 x^{2\alpha}(1-x)^{2\beta}\left[G'_x(x,s)\right]^2ds\le\frac{C_3}{(p-q)^2},\ C_3=const>0. \tag{16}$$

Если учесть (15), то из (16) следует, что второй ряд в (14) сходится равномерно. Лемма 3 доказана. Ниже докажем ряд лемм о порядке коэффициентов Фурье.

Лемма 4. *Если функция* $h(x)$ *удовлетворяет условиям (10), (12)* $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h'(x)\in C(0,1)\cap L_2(0,1)$, *то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k h_k^2\le\int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\left[h'(x)\right]^2dx. \tag{17}$$

Доказательство. Из формулы коэффициента h_k, в силу уравнения (6), следует равенство

$$\lambda_k^{1/2}h_k=\lambda_k^{1/2}\int_0^1 h(x)v_k(x)dx=-\lambda_k^{-1/2}\int_0^1 h(x)\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]'dx.$$

Из этого равенства, применяя правило интегрирования по частям и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k^{1/2}h_k=\int_0^1\left\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h'(x)\right\}\left\{\lambda_k^{-1/2}x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'_k(x)\right\}dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k^{1/2}h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}h'(x)$ по ортонормированной системе функций $\left\{x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}v'_k(x)/\sqrt{\lambda_k}\right\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя [16], справедливо неравенство (17). Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если функция* $h(x)$ *удовлетворяет условиям леммы 2, то справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2h_k^2\le\int_0^1\left[Mh(x)\right]^2dx. \tag{18}$$

Доказательство. Из формулы коэффициента h_k, в силу уравнений (8) и (11), справедливо равенство

$$\lambda_k h_k=\lambda_k\int_0^1 h(x)v_k(x)dx=-\int_0^1 h(x)Mv_k(x)dx=-\int_0^1 h(x)\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]'dx.$$

Применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $h(x)$ и $v_k(x)$, получим

$$\lambda_k h_k = -\int_0^1 \left[x^{\alpha} (1-x)^{\beta} h'(x) \right]' v_k(x) dx = \int_0^1 \left[Mh(x) \right] v_k(x) dx.$$

Отсюда следует, что число $\lambda_k h_k$ - есть коэффициент Фурье функции $Mh(x)$ по ортонормированной системе функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Тогда, согласно неравенству Бесселя, справедливо неравенство (18). Лемма 5 доказана.

Аналогично леммам 4 и 5, доказываются следующие леммы.

Лемма 6. Если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (10) – (14), а функция $Mh(x)$ удовлетворяет условиям (10), (12) и $x^{\alpha/2}(1-x)^{\beta/2}\left[Mh(x)\right]' \in C(0,1) \cap L_2(0,1)$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^3 h_k^2 \le \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta} \left\{ \left[Mh(x) \right]' \right\}^2 dx. \tag{19}$$

V. Существование и устойчивость решения задачи A_{pq}

Формальное применение метода Фурье приводит к следующему представлению решения задачи:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) v_k(x), \tag{20}$$

где

$$u_k(t) = \varphi_{1k} \mathrm{E}_{\delta,1,(-1/2)}\left[-\lambda_k t^{\delta}; \gamma t\right] + \varphi_{2k} t \mathrm{E}_{\delta,2,1/2}\left[-\lambda_k t^{\delta}; \gamma t\right] +$$

$$+\int_0^t (t-z)^{\delta-1} \mathrm{E}_{\delta,\delta,(\delta-1)/2}\left[-\lambda (t-z)^{\delta}; \gamma (t-z)\right] f_k(z) dz, \tag{21}$$

где φ_{1k}, φ_{2k}, $f_k(t)$ - коэффициенты Фурье функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $f(x,t)$ в системе собственных функций $\{v_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$,

$$\mathrm{E}_{\alpha_1,\beta_1,\theta}[x;y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\alpha_1 n + \beta_1)} \bar{J}_{\alpha n/2+\theta}(y). \tag{22}$$

Очевидно, что (22) есть функция типа функции Миттага - Леффлера [17]:

$$E_{\alpha_1,\beta_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha_1 k + \beta_1)}. \tag{23}$$

Нетрудно показать, что при $\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \theta \ge (-1/2)$ ряд (22) сходится абсолютно и равномерно при $-\infty < x, y < +\infty$.

Для функции (22) справедливы следующие равенства

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta,\theta}[x;0] = E_{\alpha,\beta}(x),\ \mathrm{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;y] = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \bar{J}_{\theta}(y),\ \mathrm{E}_{\alpha,\beta,\theta}[0;0] = \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

и следующие формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dx} \mathrm{E}_{\alpha,1,(-1/2)}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] = -\lambda x^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha,(\alpha-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right] - \gamma^2 x \mathrm{E}_{\alpha,2,1/2}\left[-\lambda x^{\alpha}; \gamma x\right], \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{x^{\beta-1}\mathrm{E}_{\alpha,\beta,(\beta-1)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right]\right\}=x^{\beta-2}\mathrm{E}_{\alpha,\beta-1,(\beta-3)/2}\left[-\lambda x^{\alpha};\gamma x\right],\beta\neq 1. \tag{25}$$

Теорема 1. Если $p\neq q$ и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям леммы 6, а функция $f(x,t)\in C(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условиям леммы 6 по аргументу x равномерно по t, то сумма ряда (20) определяет единственное решение задачи A_{pq}.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что ряд (20) и ряд, соответствующий функции $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)$ сходится равномерно в $\overline{\Omega}$, а ряды, соответствующие функциям $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x$, $D_{0t}^{\delta,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$, сходятся равномерно на любом компакте $D\subset\Omega$.

Сначала рассмотрим ряд (19). Так как

$$\left|u_k(t)\right|\leq C_4\left|\varphi_{1k}\right|+C_5\left|\varphi_{2k}\right|+C_6\int_0^T\left|f_k(z)\right|dz,\ C_j=const>0,\ \ j=4,5,6, \tag{26}$$

то справедливы неравенства

$$\left|u(x,t)\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)v_k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left|u_k(t)\right|\left|v_k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{C_4\left|\varphi_{1k}\right|+C_5\left|\varphi_{2k}\right|+C_6\int_0^T\left|f_k(z)\right|dz\right\}\left|v_k(x)\right|. \tag{27}$$

На основании неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\varphi_{jk}\right|\left|v_k(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\leq\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2},\ j=1,2,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\sqrt{\int_0^T f_k^2(z)dz}\left|v_k(x)\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k\int_0^T f_k^2(z)dz}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right|\leq\left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\int_0^T f_k^2(z)dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}=$$

$$=\left[\int_0^T\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k f_k^2(z)dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 3 и 4, сходятся равномерно по x на $[0,1]$.

Следовательно, ряд, стоящий в левой части, сходится равномерно по x на $[0,1]$. Отсюда и из (27) следует, что ряд (20) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Рассмотрим ряд, соответствующий функции $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x$.

В силу (26), из (20) следует неравенство

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x\right]_x\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left\{C_4\left|\varphi_{1k}\right|+C_5\left|\varphi_{2k}\right|+C_6\int_0^T\left|f_k(z)\right|dz\right\}\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}v'_k(x)\right]'\right|. \tag{28}$$

Отсюда, в силу уравнения (6), на любом компакте $D(\subset\Omega)$ имеем

$$\left|\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\left\{C_4|\varphi_{1k}|+C_5|\varphi_{2k}|+C_6\int_0^T|f_k(z)|dz\right\}v_k(x)\right|.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k\varphi_{jk}v_k(x)\right| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\lambda_k^{3/2}\varphi_{jk}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\varphi_{jk}^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}, \quad j=1,2,$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\sqrt{\int_0^T f_k^2(z)dz}\,|v_k(x)| = \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\sqrt{\lambda_k^3\int_0^T f_k^2(z)dz}\right|\left|\frac{v_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\right| \le \left[\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3\int_0^T f_k^2(z)dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\int_0^T\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^3 f_k^2(z)dz\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{v_k^2(x)}{\lambda_k}\right]^{1/2}.$$

Здесь ряды, стоящие в правой части, в силу лемм 2 и 6, сходятся равномерно по x на $[0,1]$. Тогда равномерно по x на $[0,1]$ сходится и ряд, стоящий в левой части. Следовательно, ряд (28) сходится абсолютно и равномерно на компакте D. Аналогично доказывается сходимость и остальных рядов.

Пусть $p \ne q$, а функция $u(x,t)$ - есть решение задачи A_{pq} с однородным уравнением и однородными условиями (4), (5). Рассмотрим его коэффициенты Фурье по системе собственных функций задачи $\{(5),(6)\}$:

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)v_k(x)dx.$$

Тогда, в силу формулы (21) и $\varphi_{jk}=0$, $j=1,2$, $k\in N$, имеем $u_k(t)=0, k\in N$.

Согласно свойствам функции Грина и теореме Мерсера [16], имеют место следующие равенства:

$$u(x,t) = -\int_0^1 G(x,s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}u_s(s,t)\right]_s ds =$$

$$-\int_0^1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)v_k(s)}{\lambda_k}\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}u_s(s,t)\right]_s ds = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\lambda_k}\int_0^1 v_k(s)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\beta}u_s(s,t)\right]_s ds.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям два раза и учитывая свойства функций $u(s,t)$, $v_k(x)$ и уравнение (6), получим

$$u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)}{\lambda_k}\int_0^1 u(s,t)\left[s^{\alpha}(1-s)^{\alpha}v_k'(s)\right]' ds =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}v_k(x)\int_0^1 u(s,t)v_k(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)v_k(x) = 0,$$

поскольку $u_k(t)=0$, $k\in N$. Следовательно, $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\bar{\Omega}$. Отсюда следует единственность решения задачи A_{pq}. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задачи A_{pq} справедлива следующая оценка:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le C_7 \left\|\varphi'_1(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_8 \left\|\varphi'_2(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)} + C_9 \left\|\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\right\|_{L_{2,r}(\Omega)},$$

где $\left\|u(x,t)\right\|_{C(\bar{\Omega})} = \sup\limits_{\bar{\Omega}} \left|u(x,t)\right|$, $\left\|g'(x)\right\|_{L_{2,r}(0,1)} = \left[\int_0^1 r(x)\left[g'(x)\right]^2 dx\right]^{1/2}$, $r(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$.

Список литературы

[1]. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

[2]. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – Москва, Физматлит, 2003. – 272 с.

[3]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006. – 522 p.

[4]. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1968. – 3 (1), – С. 3-29.

[5]. Джрбашян М. М. Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма – Лиувилля // Изв. АН АрмССР. Mat. – 1970. – 5 (2), – С. 71-96.

[6]. Нахушев А. М. Задача Штурма – Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР. – 1977. – 234 (2). – С. 308-311.

[7]. Алероев Т. С. К проблеме о нулях функции Миттага – Леффлера и спектре одного дифференциального оператора дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 2000. – 36 (9). – С. 1278-1279.

[8]. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – Москва. Наука, 2005. – 199 с.

[9]. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel. 1969.

[10]. Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. Comparison theorems of tempered fractional differential equations // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2022. – 231. pp. 2477-2485.

[11]. Уринов А.К. Обобщение интегралов и производных дробного порядка Римана - Лиувилля с помощью функции Бесселя // Бюллетень Института математики. – 2022. – 5(1). – С. 108-155.

[12]. Уринов А., Усмонов Д. О задаче Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего интегро – дифференциальный оператор с функцией Бесселя в ядре. *Бюллетень Института математики*. 2023, Т. 6. No 1. С. 138-153.

[13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. 1965. Москва: Наука.

[14] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя. Функции параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. 1966. Москва, Наука, 1966. 296с.

[15] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. - Москва: Наука, 1969. 528 с.

[16] Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - Москва: Физматлит, 1959. 232 с.

[17] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. Ортогональные полиномы. 1967. Москва: Наука.

A NONLOCAL PROBLEM FOR A SECOND-ORDER DEGENERATE EQUATION CONTAINING A FRACTIONAL ORDER INTEGRO - DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A BESSEL FUNCTION IN THE KERNEUS

A. K.Urinov, D. A. Usmonov
Fergana State University, Fergana, 150100, str. Murabbiylar, 19 (Uzbekistan). E-mail: fardu_info@umail.uz

Abstract. In this article, in a rectangular domain, we study the initial-boundary problem for a degenerate second-order differential equation containing an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel. At the same time, by applying the method of separation of variables to the considered problem, a spectral problem for an ordinary differential equation has been obtained. Next, the Green's function of the spectral problem was constructed, with the help of which it is equivalently reduced to an the second kind Fredholm integral equation with a symmetric kernel. The solution of the considered problem has been written as the sum of a Fourier series with respect to the system of eigenfunctions of the spectral problem. An estimate for solution the problem was obtained, from which follows its continuous dependence on the given functions.

In this paper, in the domain $\Omega=\{(x,t):0<x<1;\,0<t<T\}$, we consider the following a degenerate second-order differential equation containing an integro-differential operator with a Bessel function in the kernel

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma}u(x,t)+bu(x,t)=\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\right]_x+f(x,t), \tag{1}$$

where α, β, γ, δ, b are given real numbers, such that $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$, $1<\delta<2$, $b\ge0$,

$$ {}_C D_{0t}^{\delta,\gamma}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\int_0^t (t-z)^{1-\delta}\,\bar{J}_{(1-\delta)/2}\left[\gamma(t-z)\right]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\gamma^2\right)u(x,z)\,dz$$

- fractional differential operator of the Caputo operator type with the Bessel function in the kernel of the function $u(x,t)$ with respect to the argument t, $\bar{J}_{\nu}(z)$ - the Bessel - Clifford function defined by the equalities

$$\bar{J}_{\nu}(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{2k}}{k!(\nu+1)_k},$$

$(z)_k$ - Pochhammer Symbol, $\Gamma(x)$ - Euler gamma function, $J_{\nu}(x)$ - Bessel function of the first kind of order ν.

Problem A_{pq} **.** Find a function $u(x,t)$ with the following properties: 1) $u(x,t)$, $x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x, u_t\in C(\bar{\Omega})$, $D_{0t}^{\delta,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$, $\left[x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x\right]_x\in C(\Omega)$; in the domain Ω satisfies equation (1); 3) on the boundary of the domain Ω, it satisfies the following boundary and initial conditions:

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\,u_t(x,0)=\varphi_2(x),\ x\in[0,1];$$

$$pu(0,t)=qu(1,t),\,q\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\Big|_{x=0}=p\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}u_x(x,t)\Big|_{x=1},\,t\in[0,T],$$

where $\varphi_1(x)$ and $\varphi_2(x)$ are given continuous functions, p, q are given real numbers, such that $p^2+q^2\ne0$.

References

[1]. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye ih prilozhenija. – Minsk: Nauka i tehnika, 1987. – 688 s.

[2]. Nahushev A.M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie. – Moskva, Fizmatlit, 2003. – 272 s.

[3]. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differ-ential equations. – Amsterdam, North-Holland. Mathematics Studies 204, Elsevier, 2006. – 522 p.

[4]. Dzhrbashjan M.M., Nersesjan A.B. Drobnye proizvodnye i zadacha Koshi dlja differencial'nyh uravnenij drobnogo porjadka // Izv. AN ArmSSR. Mat. – 1968. – 3 (1), – S. 3-29.

[5]. Dzhrbashjan M. M. Kraevaja zadacha dlja differencial'nogo operatora drobnogo porjadka tipa Shturma – Liuvillja // Izv. AN ArmSSR. Mat. – 1970. – 5 (2), – S. 71-96.

[6]. Nahushev A. M. Zadacha Shturma – Liuvillja dlja obyknovennogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka s drobnymi proizvodnymi v mladshih chlenah // Dokl. AN SSSR. – 1977. – 234 (2). – C. 308-311.

[7]. Aleroev T. S. K probleme o nuljah funkcii Mittaga – Lefflera i spektre odnogo differencial'nogo operatora drobnogo porjadka // Differenc. uravnenija. – 2000. – 36 (9). – C. 1278-1279.

[8]. Pshu A. V. Uravnenija v chastnyh proizvodnyh drobnogo porjadka.
– Moskva. Nauka, 2005. – 199 c.

[9]. Prabhakar T.R. A singular integral equation with a generalized Mittag - Leffler function in the kernel. 1969.

[10]. Liguo Y., Song Z., Zhouchao W. Comparison theorems of tempered fractional differ-ential equations // Eur. Phys. J. Spec. Top. – 2022. – 231. pp. 2477-2485.

[11]. Urinov A.K. Obobshhenie integralov i proizvodnyh drobnogo porjadka Rimana - Liuvillja s pomoshh'ju funkcii Besselja // Bjulleten' Instituta matematiki. – 2022. – 5(1). – S. 108-155.

[12]. Urinov A., Usmonov D. O zadache Koshi dlja odnogo obyknovennogo differencial'nogo uravnenija, soderzhashhego integro – differencial'nyj operator s funkciej Besselja v jadre. Bjulleten' Instituta matematiki. 2023, T. 6. No 1. C. 138-153.

[13] Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Gipergeometricheskaja funkcija. Funkcija Lezhandra. 1965. Moskva: Nauka.

[14] Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Funkcii Besselja. Funkcii parabolicheskogo cilindra. Ortogonal'nye mnogochleny. 1966. Moskva, Nauka, 1966. 296s.

[15] Najmark M.A. Linejnye differencial'nye operatory. - Moskva: Nauka, 1969. 528 s.

[16] Mihlin S. G. Lekcii po linejnym integral'nym uravnenijam. - Moskva: Fizmatlit, 1959. 232 s.

[17] Bejtmen G., Jerdeji A. Vysshie transcendentnye funkcii. Jellipticheskie i avtomorfnye funkcii. Funkcii Lame i Mat'e. Ortogonal'nye polinomy. 1967. Moskva: Nauka.

Информация об авторах

1. ***Уринов Ахмаджон Кушакович*** *– доктор физики математический наук, профессор, кафедра математический анализ и дифференциальный уравнений, Ферганский государственный университет. e-mail: urinovak@mail.ru*

2. ***Усмонов Дониёр Абдумутолиб угли*** *– магистр, Ферганский государственный университет. e-mail:usmonov-doniyor@inbox.ru, тел: +998-91-667-15-17.*