



# SCIENTIFIC BULLETIN

## PHYSICAL AND MATHEMATICAL RESEARCH

**ILMIY HABARNOMA  
FIZIKA-MATEMATIKA  
TADQIQOTLARI**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Физика

<b>С.З. ЗАЙНАБИДИНОВ, А.С. САИДОВ, А.Й. БОБОЕВ, Б.М. ЭРГАШЕВ</b>	
Получения, морфология и фотоэлектрические свойства гетероструктуры $n\text{-Si}-p\text{-(Ge}_2\text{)}_{1-x-y}\text{(GaAs)}_x\text{(ZnSe)}_y$ .....	7
<b>Н.Ф. ЗИКРИЛЛАЕВ, К.А. ИСМАЙЛОВ, С.З. ЗАЙНАБИДИНОВ, З.Т. КЕНЖАЕВ, Б.К. ИСМАЙЛОВ</b>	
Влияние легирования никелем на спектральную чувствительность кремниевых солнечных элементов .....	16
<b>М.Ш. ИСАЕВ, А.Т. МАМАДОЛИМОВ, Ш.К. АКБАРОВ</b>	
Структура приповерхностного слоя диффузационно-легированного кремния атомами хрома и кобальта.....	21
<b>М.В. TAGAEV, A.A. ABDREYMOV, U.D. BAIRAMOV</b>	
Kremniyli p-n o'tishda mikroplazmalarning shakllanishi.....	27
<b>М.В. FOZILJONOV, I.N. KARIMOV, A.E. ABDIKARIMOV</b>	
Influence of the local trapped charge in oxide to the gate - drain capacitance in a FinFET .....	33
<b>Ш.Х. ЙУЛЧИЕВ, И.М. СОЛИЕВ, Х.Ж. МАНСУРОВ</b>	
Рентгеноструктурные исследования кремния марки КДБ-20 с участием кислорода.....	37

### Техника

<b>Р.А. МУМИНОВ, В.Г. ДЫСКИН, О.Ф. ТУКФАТУЛЛИН, Б.Н. БУТУНБАЕВ, К.А. ДЖУМАМАРУТОВ</b>	
К вопросу применения гидрофобных плёнок для пассивной очистки фронтальной поверхности фотоэлектрических модулей.....	42
<b>С. ЗАЙНАБИДИНОВ, Б. УРМАНОВ, С. АЛИЕВ</b>	
Разработка конструкции нового солнечного осветительного устройства.....	47
<b>С.С. НАСРИДДИНОВ, А.К. ХАМРАКУЛОВ, Н.Т. МОВЛОНОВ, М.И. МАННАНОВ</b>	
Метод определения удельного сопротивления почвы.....	53
<b>Ш.А. ГУЛАМОВ, Г.М. МҮМИНОВА</b>	
Легирланган ва лнгирланмаган қўға ўсимлиги толаларини таййорлаш хамда уларнинг оптоэлектроник хоссалари тадқиқ қилиш усуллари.....	58

### Математика

<b>А.К. УРИНОВ, Д.А. УСМОНОВ</b>	
Нелокальная задача для вырождающегося уравнения второго порядка, содержащего интегро-дифференциальный оператор дробного порядка с функцией бесселя в ядре.....	64
<b>N. UMRZAQOV, I.S. ZAYNABIDDINOV</b>	
On a pursuit differential game with integral constraints in $R^n$ .....	75
<b>Д.Д. АХМЕДОВА</b>	
Динамические системы симплекса квадратичных гомеоморфизмов.....	83

<b>Ф.А. ЮСУПОВ, Д.Д. АХМЕДОВА</b>	
Инвариантность некоторых стохастических квадратичных операторов неволтеррного типа в двухмерном симплексе.....	87
<b><u>Информатика</u></b>	
<b>Р.К. АЗИМОВ, Б.Р. АЗИМОВ</b>	
Машинали ўқитишда регрессия усуллари.....	90
<b>М.К.МАХКАМОВ, Х.А.МАМАДАЛИЕВ, Ш.Ш.ХОЖИКУЛОВ</b>	
Метод Фурье для исследования распространения волны уплотнения в трубопроводах установленном демпфером.....	96
<b>Ғ.О. ТАЖИБАЕВ, М.М. МИРЗАЕВА, Ш.О. ТҮРАХОНОВА.</b>	
Юпқа пластина эгилиши масаласини интегралли усулда ечишда чегаравий шартларга боғлиқ бўлган маҳсусликни эътиборга олиш.....	104
<b><u>Персоналии</u></b>	
Академиг М.Мусахонов 80 ёшда.....	111
<i>Правила оформления статьи</i> .....	113

# Инвариантность некоторых стохастических квадратичных операторов неволтеррного типа в двухмерном симплексе

<sup>1</sup>Юсупов Ф. А., <sup>2</sup>Ахмедова Д. Д

<sup>1</sup>Ташкентский Государственный Транспортный Университета

<sup>2</sup>Андижанский государственный университет им. З.М. Бобура. 170100 г. Андижан Узбекистан

Получена 8 мая 2023 г. Принята к печати 25 мая 2023 г.

**Аннотация:** в настоящем работе найдено внутренние не подвижные точки некоторых квадратичных стохастических операторов и изучено характеристика этих точек доказано что существует инвариантные линии соединяющие их

**Ключевые слова:** Симплекс, стохастический оператор, не подвижная точка, инварианта

**Annotation.** In the present work, internal fixed points of some quadratic stochastic operators are found and the characteristics of these points are studied and it is proved that there are invariant lines connecting them

**Keywords:** Simplex, stochastic operator, fixed point, invariant

**Annotatsiya:** Ushbu maqolada ikki o'lchamli simpleksda ba'zi novolterra tipidagi kvadratik stoxastik operatorlaning ichki qo'zg'almas nuqtalari topilgan hamda bu nuqtalarning haraktrestikalari o'rganib chiqilib, bu nuqtalarni tutashtiruvchi invariant chiziq mavjudligi isbotlangan

**Kalit so'zlar:** Simpleks, stoxastik operator, qo'zg'almas nuqta,

PACS numbers: 02.30.Oz, 02.30.Mv, 02.30.Yy, 02.50.Le.

Имеет следующий вид:

$$W: \begin{cases} x' = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz \\ y' = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xz \\ z' = b(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy \end{cases} \quad (1)$$

где  $2a + b = 1$ ,  $a, b \geq 0$ .

**Было изучено неподвижная точка оператора при  $a = 0$**

$(0,0,1)$  и  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$  будет решением системы

$$\begin{cases} 2yz = x \\ 2xz = y \\ (x^2 + y^2 + z^2) + 2xy = z \end{cases}$$

**В случае когда  $0 < a \leq \frac{1}{2}$**

$$\begin{cases} a(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz = x \\ a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xz = y \\ b(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy = z \end{cases} \quad (2)$$

Вычитаем второе уравнение из первого уравнения системы (2).

$$\begin{aligned} 2z(y - x) &= x - y \\ (y - x)(2z + 1) &= 0 \\ y &= x, z = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Невозможно в случае когда  $z = -\frac{1}{2}$ , если соотношение  $y = x$  и  $z = 1 - 2x$  подставим на первое уравнения системы (2) тогда составим следующее квадратное уравнения

$$(6a - 4)x^2 + (1 - 4a)x + a = 0$$

Дискриминант данного уравнения имеет сл.вид :

$$D = 1 + 8a - 8a^2 = 1 + 8a(1 - a) > 0$$

Поэтому данное уравнения имеет два корня следующего вида:

$$x_{1,2} = \frac{4a - 1 \pm \sqrt{1 + 8a(1 - a)}}{4(3a - 2)}$$

Известно что при  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  выполняется следующее неравенство:

$4a - 1 + \sqrt{1 + 8a(1 - a)} > 4a \geq 0$  и  $3a - 2 < 0$ . Из этого мы имеем отрицательный корень

$x_2 = \frac{4a - 1 + \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)} < 0$ , поэтому мы не

имеем право взять это решение.

При выполнении неравенств

$4a - 1 - \sqrt{1 + 8a(1 - a)} < 2(2a - 1) \leq 0$  и  $3a - 2 < 0$  корень квадратного уравнения равняется

$$x_1 = \frac{4a - 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)} \quad \text{и} \quad x_1 > 0 \quad \text{Из}$$

$$1 - 4a + \sqrt{1 + 8a - 8a^2} < 1 - 4a + \sqrt{1 + 8a + 16a^2} = 1 - 4a + \sqrt{(1 + 4a)^2} = 2$$

$$\text{и } 0 < a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \leq 8 - 12a < 8 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{8 - 12a} \leq \frac{1}{2}$$

вытекает следующее:

$$x_1 = \frac{4a - 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)} = \frac{1 - 4a + \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{8 - 12a} < 1.$$

В итоге мы приходим к следующему выводу что оператор (1) при условии  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  имеет неподвижную точку

$$(x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{4a - 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)}, \frac{4a - 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)}, \frac{2a - 3 + \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{2(3a - 2)} \right)$$

**Для определения тип неподвижных точек воспользуясь равенством  $z = 1 - x - y$**  запишем оператор (1) следующем виде:

$$V: \begin{cases} x' = a(x^2 + y^2 + (1-x-y)^2) + 2y(1-x-y) \\ y' = a(x^2 + y^2 + (1-x-y)^2) + 2x(1-x-y) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Где } (x; y) \in T = \{(x; y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\} \text{ и}$$

точки  $x, y$  являются координатами первоначальной точки лежащей двухмерном симплексе.

Якобиан оператора  $V$  в точке  $(x, y)$  имеет следующий вид:

$$J_V(x, y) = \begin{pmatrix} 2(2ax + (a-1)y - a) & 2(a-1)(x + 2y - 1) \\ 2(a-1)(2x + y - 1) & 2((a-1)x + 2ay - a) \end{pmatrix}.$$

Из того что выполняется равенство  $x^* = y^*$  в неподвижной точке  $(x^*, y^*, z^*)$  находим собственные значения в данной неподвижной точке следующим образом.

$$|J_V(x^*, y^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2((3a-1)x^* - a) - \lambda & 2(a-1)(3x^* - 1) \\ 2(a-1)(3x^* - 1) & 2((3a-1)x^* - a) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2} \quad \lambda_2 = \frac{3 - 2a - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{3a - 2}$$

Нетрудно показать что имеет места неравенство  $1 - \sqrt{3} \leq 1 - \sqrt{1 + 8a - 8a^2} < 0$

$$-1 < \frac{3 - 2a - \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{3a - 2} \leq 2\sqrt{3} - 4 \quad \text{при}$$

выполнении неравенств  $0 < a \leq \frac{1}{2}$ ,

$1 < \sqrt{1 + 8a - 8a^2} \leq \sqrt{3}$  откуда и вытекает выполнения неравенств  $|\lambda_1| < 1$  и  $|\lambda_2| < 1$ .

Таким образом мы показали что неподвижная точка  $(x^*, y^*, z^*)$  является гиперболическая неподвижная точка притягивающего типа.

**Инвариантные множества:** Из равенства  $x' - y' = -2z(x - y)$  вытекает что  $x = y \Leftrightarrow x' = y'$  т.е. медиана  $x = y$  является инвариантной прямой. Кроме того вершины симплекса  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  и первое ребро  $z = 0$  после первой итерации будет принадлежать инвариантной прямой  $x = y$ .

**Периодические точки.**

$$W: \begin{cases} x' = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz \\ y' = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2xz \\ z' = b(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy \\ x'' = a(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2y'z' \\ y'' = a(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2x'z' \\ z'' = b(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2x'y' \\ a(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2y'z' = x \\ a(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2x'z' = y \\ b(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2x'y' = z \\ x'' - y'' = 2z'(y' - x') = (x - y) \\ y' - x' = 2z(x - y) \\ 4z \cdot z'(x - y) = (x - y) \\ (4z \cdot z' - 1)(x - y) = 0 \\ x = y, 4z \cdot z' - 1 = 0 \\ a) x = y \end{cases}$$

$$f(x) = x' = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz = (6a - 4)x^2 + (1 - 4a)x + a$$

$$f^2(x) = x'' = a(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2y'z' = (6a - 4)x'^2 + (1 - 4a)x' + a$$

Введем следующую обозначения:  $f(x) - x = t \Rightarrow f(x) = t + x$

$$\begin{aligned} f^2(x) - x &= (6a - 4)x'^2 + (1 - 4a)x' + a = \\ &= (6a - 4)(t + x)^2 + (1 - 4a)(t + x) + a = \\ &= t((6a - 4)(t + 2x) + 3 - 4a) \end{aligned}$$

$$\frac{f^2(x) - x}{f(x) - x} = 0$$

$$(6a - 4)(t + 2x) + 3 - 4a = 0$$

$$(6a - 4)^2 x^2 + (6a - 4)(3 - 4a)x + 6a^2 - 8a + 3 = 0$$

Это уравнения не имеет действительных корней потому что

$$D = (6a - 4)^2 \left( -1 - 8 \left( a - \frac{1}{2} \right)^2 \right) < 0$$

**На медиане  $x = y$**  выполняется сл. соотношений:

$$x' = f(x) = (6a - 4)x^2 + (1 - 4a)x + a$$

$$g(x) = \mu x(1 - x)$$

$$(f \circ h)(x) = (h \circ g)(x) \text{ где } h(x) = ax + \beta$$

$$(f \circ h)(x) = (6a - 4)(\alpha x + \beta)^2 + (1 - 4a)(\alpha x + \beta) + a = \alpha^2(6a - 4)x^2 + (2\alpha\beta(6a - 4) + \alpha(2 - 4a))x + (6a - 4)\beta^2 + (2 - 4a)\beta + a$$

$$(h \circ g)(x) = \alpha\mu x(1 - x) + \beta = -\alpha\mu x^2 + \alpha\mu x + \beta$$

$$\begin{cases} -\alpha\mu = \alpha^2(6a - 4) \\ \alpha\mu = 2\alpha\beta(6a - 4) + \alpha(2 - 4a) \\ \beta = (6a - 4)\beta^2 + (2 - 4a)\beta + a \end{cases}$$

Из первого уравнения получим

$$\mu = \alpha(4 - 6a)$$

Из второго уравнения получим

$$\mu = 2\beta(6a - 4) + (2 - 4a)$$

Приравниваем найденные нами  $\mu$  получим

$$2\beta(6a - 4) + (2 - 4a) = \alpha(4 - 6a)$$

$$\alpha = \frac{\beta(6a - 4) + 1 - 2a}{2 - 3a}$$

Из третьего уравнения получим

$$(6a - 4)\beta^2 + (1 - 4a)\beta + a = 0$$

$$\beta = \frac{4a - 1 \pm \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4(3a - 2)}$$

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8a - 8a^2}}{4 - 6a}$$

$$\mu = 1 \pm \sqrt{1 + 8a - 8a^2}.$$

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 8a - 8a^2} = 1 + \sqrt{1 + 8a(1 - a)} = 1 + \sqrt{3 - 8\left(a - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\max \mu = 1 + \sqrt{3} < 3$$

$\min \mu = 2$  т.е. имеет место сл.неравенство:  $2 \leq \mu < 3$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. M. I. Zakharevich, Uspekhi Mat. Nauk 33:6 (1978), 207–208; English transl., Russian Math. Surveys 33:6 (1978), 265–266.

2. К.А.Курганов. Асимптотическое поведение траекторий дискретных динамических систем, порожденных квадратичными стохастическими операторами волтерровского типа. Канд. Дисс. АН. Р. Узбекистан. Институт математики имени В.И. Ромоновского .1994 г.

3. N.Ganikhodjaev,R.Ganikhodjaev,U.Jamilov,Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics,Ergod.Th.and Dynam.Sys.35(5)(2015)1443-1473.

4. Ганиходжаев Р. Н. Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Мат. заметки. 1994. 56. С. 1125-1131. 34

5. К.А.Курганов.,ГаниходжаевР.Н. “Динамика вольтера стохастических операторов

четвертой степени” Республикаанская научная конференция.Ташкент.2013.19-21 сентябрь.77-79стр. Harary. Graph Theory. М.: Мир, 1973.

## Invariance of some stochastic quadratic operators of non-volterra type in a two-dimensional simplex

<sup>1</sup>Yusupov F. A, <sup>2</sup>Ahmedova D. D

<sup>1</sup>Tashkent State Transport University

<sup>2</sup>Andijan State University named after Z.M. Bobur. 170100 Andijan Uzbekistan

**Annotation.** In the present work, internal fixed points of some quadratic stochastic operators are found and the characteristics of these points are studied and it is proved that there are invariant lines connecting them

**Keywords:** Simplex, stochastic operator, fixed point, invariant

## References

1. M. I. Zakharevich, Uspekhi Mat. Nauk 33:6 (1978), 207–208; English transl., Russian Math. Surveys 33:6 (1978), 265–266.

2. K.A.Kurbanov. Асимптотическое поведение траекторий дискретных динамических систем, порожденных квадратичными стохастическими операторами волтерровского типа. Канд. Дисс. АН. Р. Узбекистан. Институт математики имени В.И. Ромоновского .1994 г.

3. N.Ganikhodjaev,R.Ganikhodjaev,U.Jamilov,Quadratic stochastic operators and zero-sum game dynamics,Ergod.Th.and Dynam.Sys.35(5)(2015)1443-1473.

4. Ганиходжаев Р. Н. Карта неподвижных точек и функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем // Мат. заметки. 1994. 56. С. 1125-1131. 34

5. К.А.Курганов.,ГаниходжаевР.Н. “Динамика вольтера стохастических операторов четвертой степени” Республикаанская научная конференция.Ташкент.2013.19-21 сентябрь.77-79стр.

## Сведения об авторов

**Юсупов Фаррух Алишер угули**

E-mail: farrukhyusirovchambil@mail.ru

Докторант Ташкентский Государственный Транспортный Университета

**Ахмедова Диляфруз Даурбек кизи**

Tel: +99877275525 E-mail: [dilafruz\\_zahmedova212@icloud.com](mailto:dilafruz_zahmedova212@icloud.com)

Докторант Андижанского государственного университета